3. Übung Methoden der Signalverarbeitung

Wintersemester 2014/2015

Institut für Industrielle Informationstechnik

Kurzzeit-Fourier-Transformation

Kurzzeit-Fourier-Transformation

1. Fourier-Transformation
2. Kurzzeit-Fourier-Transformation

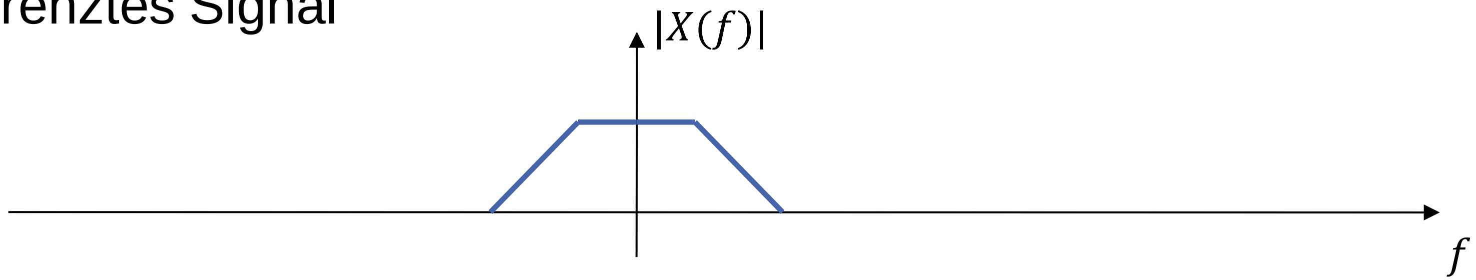
1. Fourier-Transformation

- Vergleich eines Signals $x(t)$ mit einer komplexen Schwingung $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}$

$$X(f) = \left\langle x(t), \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

1. Fourier-Transformation

- Bandbegrenztes Signal



1. Fourier-Transformation

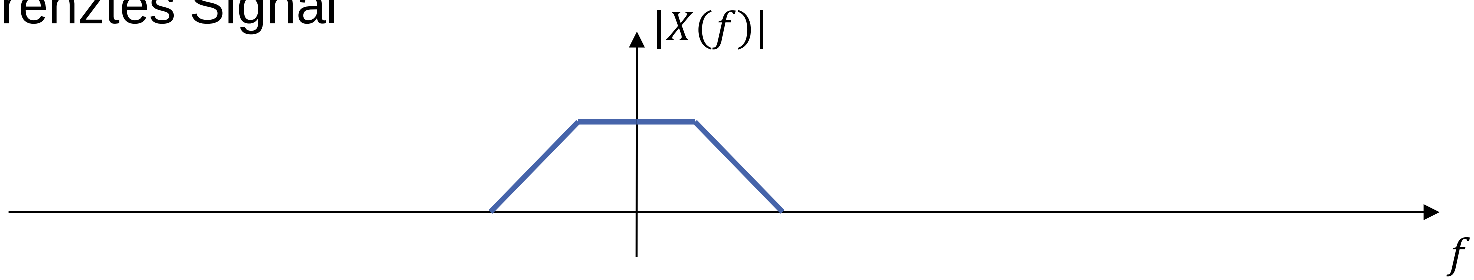
- Vergleich eines Signals $x(t)$ mit einer komplexen Schwingung $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}$

$$X(f) = \langle x(t), \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\,\mathrm{d}t$$

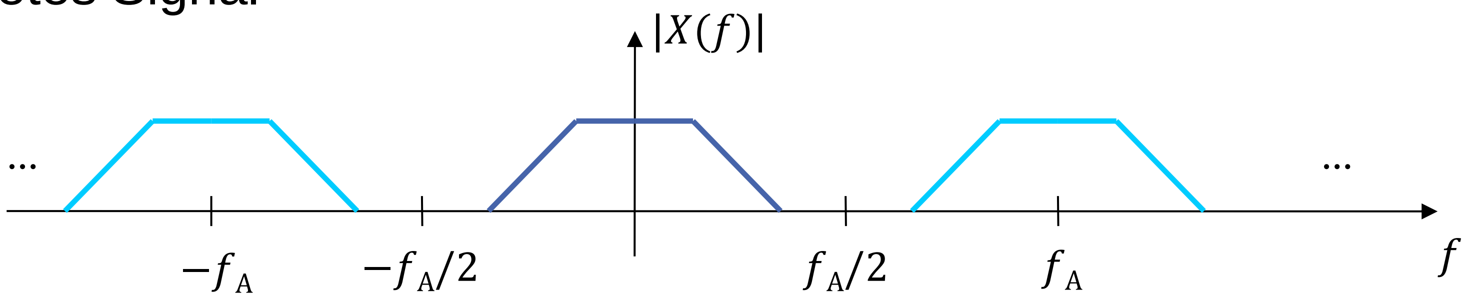
- Abtastung des Signals mit Abtastfrequenz f_A führt zu periodischer Wiederholung des Spektrums mit f_A

1. Fourier-Transformation

- Bandbegrenztes Signal



- Abgetastetes Signal



1. Fourier-Transformation

- Vergleich eines Signals $x(t)$ mit einer komplexen Schwingung $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}$

$$X(f) = \langle x(t), \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t} \, \mathrm{d}t$$

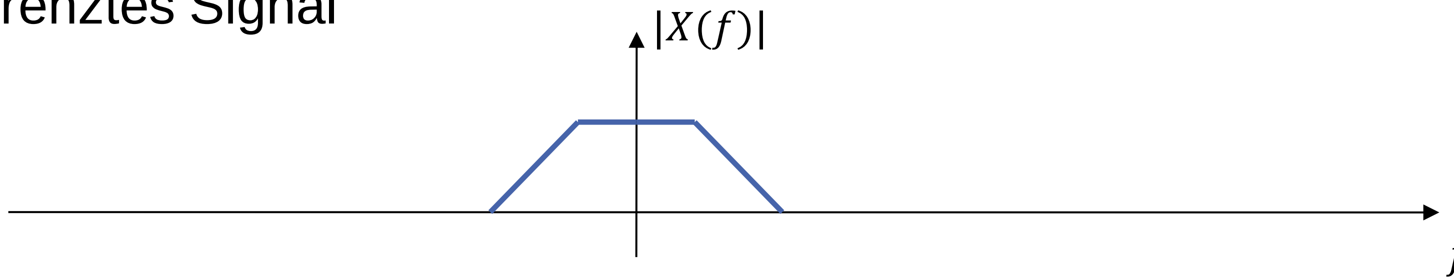
- Abtastung des Signals mit Abtastfrequenz f_A führt zu periodischer Wiederholung des Spektrums mit f_A

- Abtasttheorem von Shannon:

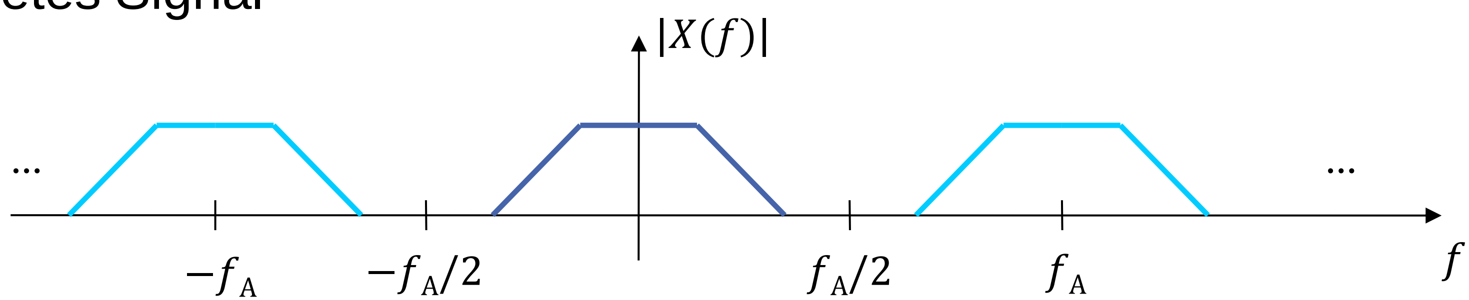
  Abtastfrequenz muss mindestens doppelt so groß sein wie die größte im Signal vorkommende Frequenz.

1. Fourier-Transformation

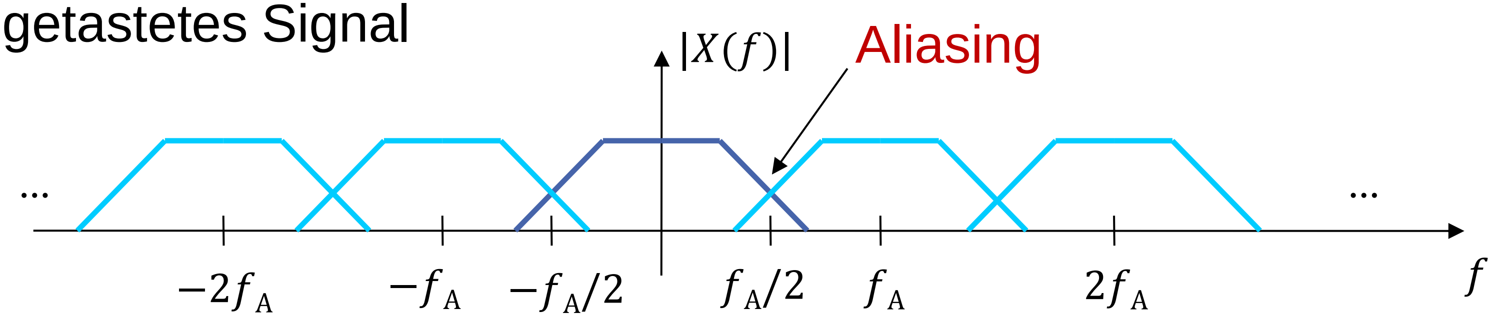
- Bandbegrenztes Signal



- Abgetastetes Signal

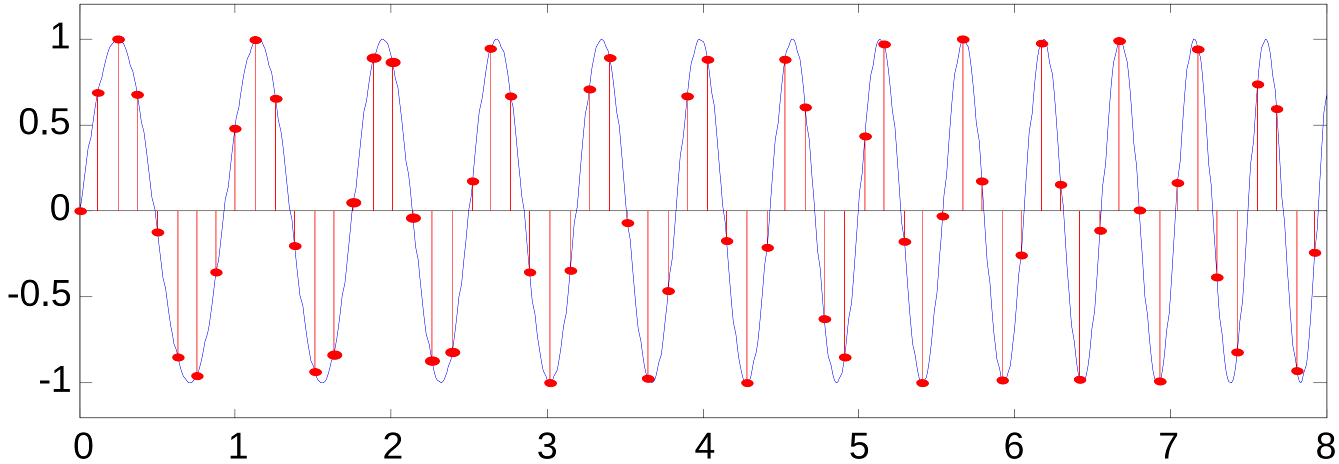


- Unterabgetastetes Signal

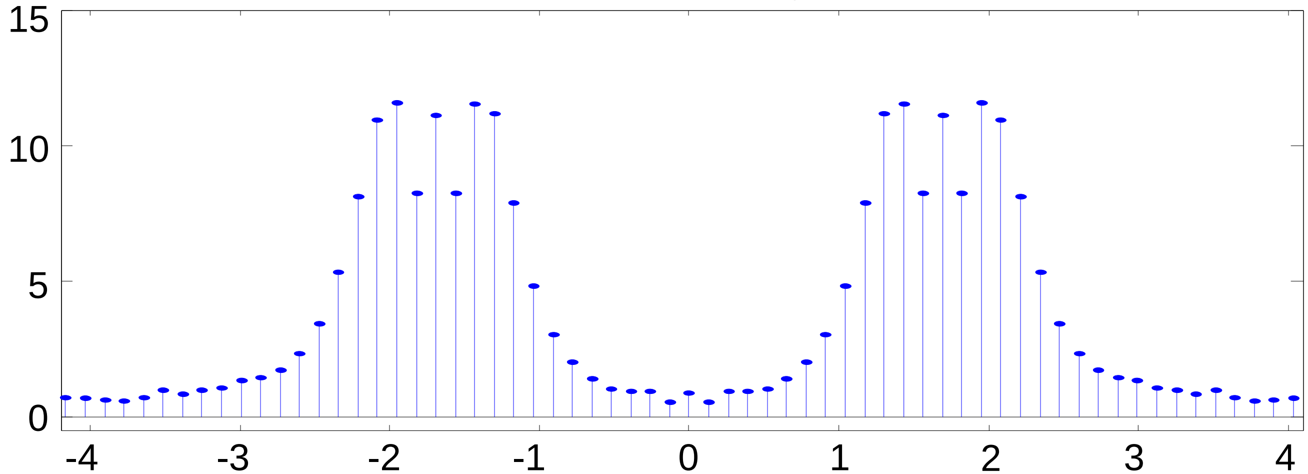


1. Fourier-Transformation

Zeitvariantes Signal $x(t) = \sin(2\pi(f + 0{,}08t) \cdot t)$



Spektrum $|X(f)|^2$



2. Kurzzeit-Fourier-Transformation

- Vergleich eines gefensterten Signals $x(t)\gamma^*(t-\tau)$ mit einer komplexen Schwingung $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}$

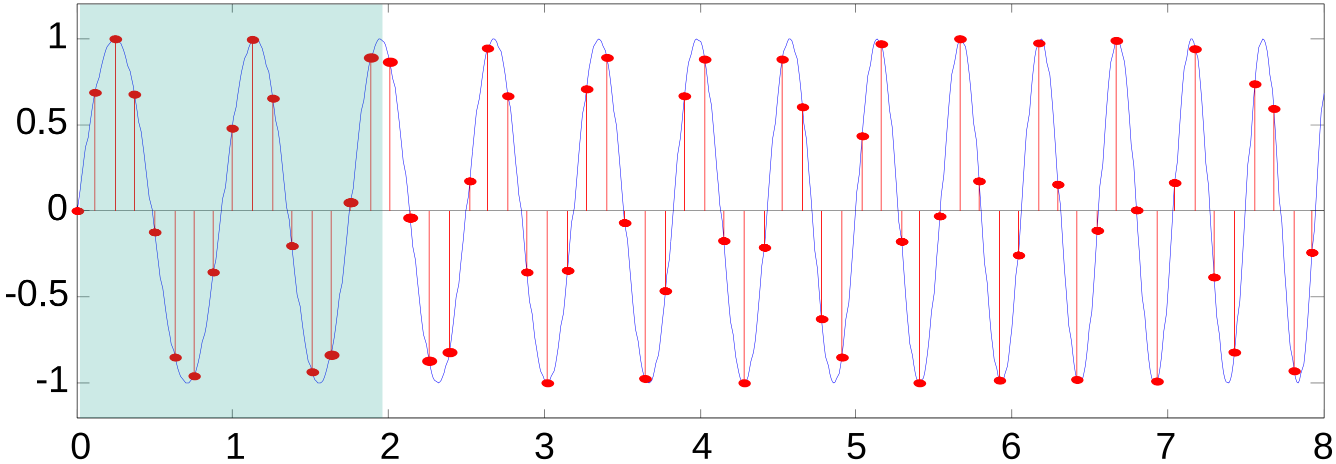
$$\begin{aligned} F_x^\gamma(\tau, f) &= \left\langle x(t)\cdot\gamma^*(t-\tau), \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}\right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\gamma^*(t-\tau)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

- Vergleich eines Signals $x(t)$ mit einem zeit- und frequenzverschobenen Fenster $\gamma(t-\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}$

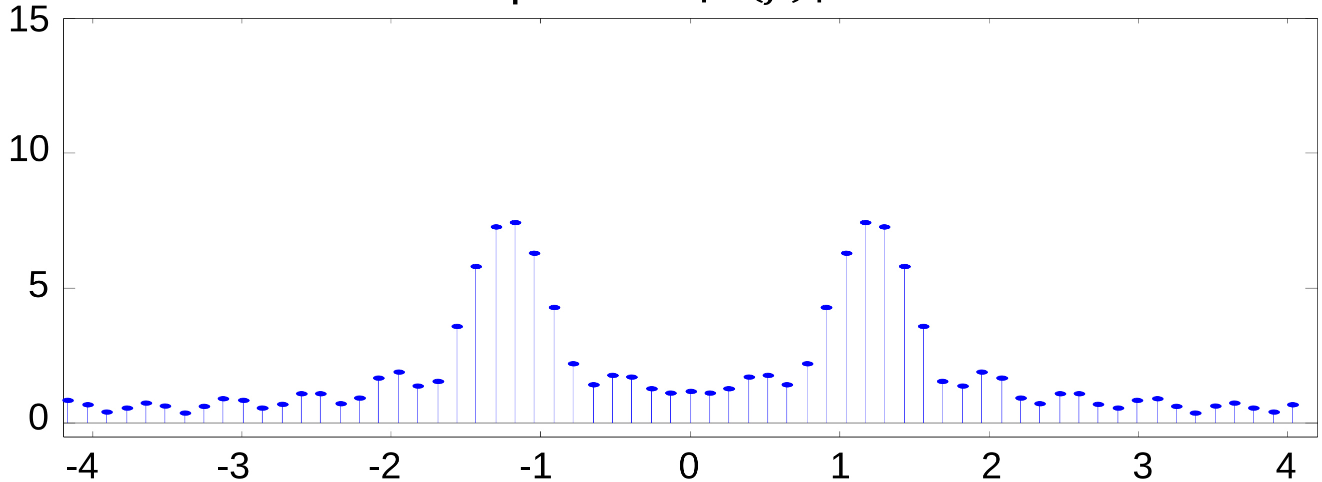
$$\begin{aligned} F_x^\gamma(\tau, f) &= \left\langle x(t), \gamma(t-\tau)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}\right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\gamma^*(t-\tau)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

2. Kurzzeit-Fourier-Transformation

Zeitvariantes Signal $x(t) = \sin(2\pi(f + 0{,}08t) \cdot t)$

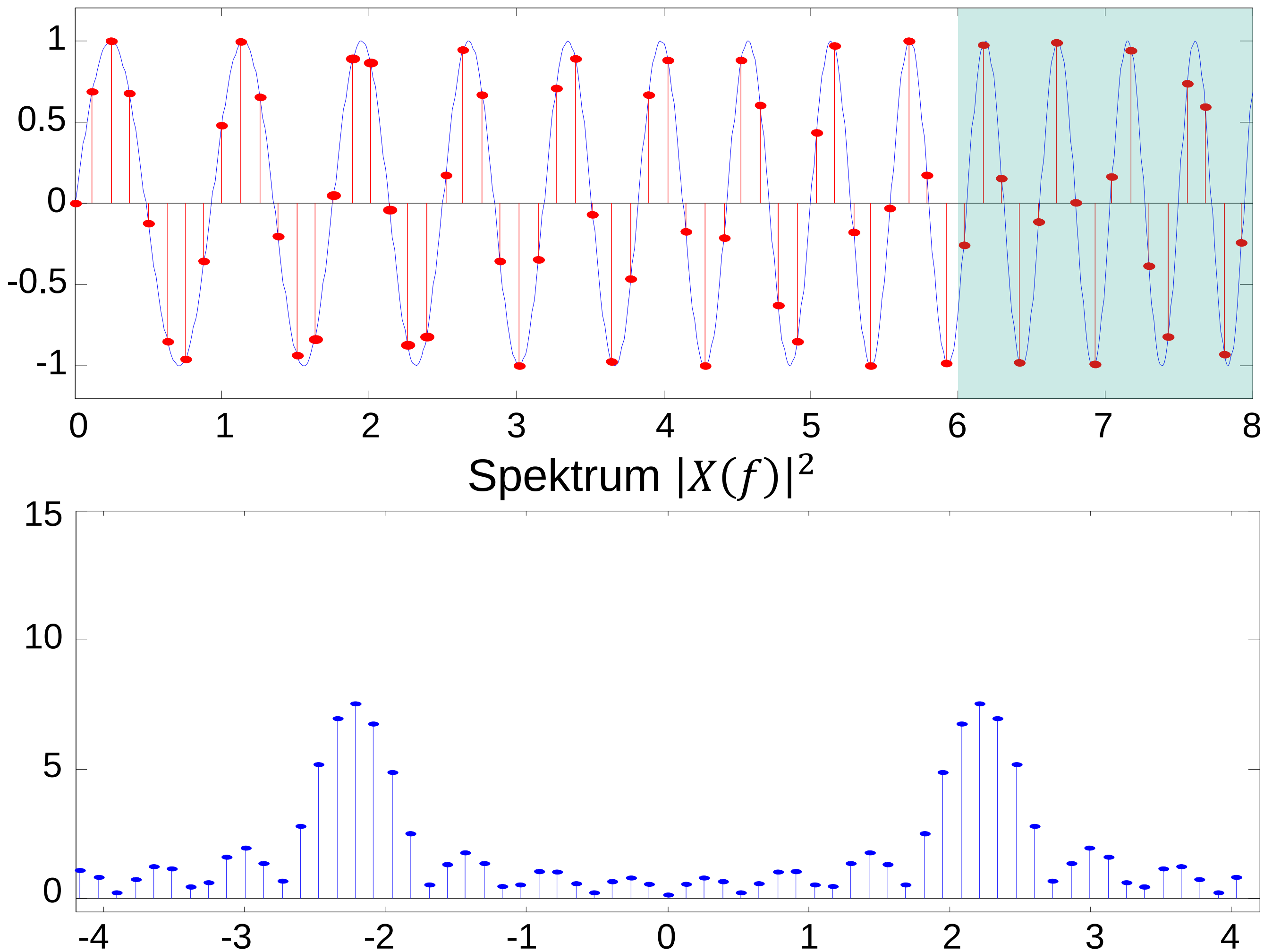


Spektrum $|X(f)|^2$



2. Kurzzeit-Fourier-Transformation

Zeitvariantes Signal $x(t) = \sin(2\pi(f + 0{,}08t) \cdot t)$



Aufgaben

Aufgabe 1: Short-Time-Fourier-Transformation I

Berechnen Sie die STFT für folgende Spezialfälle:

a) Analysefenster mit Bandbreite $\Delta_f = 0$ und Zeitdauer $\Delta_t = \infty$:

$$\gamma(t) = 1 \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \Gamma(f) = \delta(f)$$

b) Analysefenster mit Zeitdauer $\Delta_t = 0$ und Bandbreite $\Delta_f = \infty$:

$$\gamma(t) = \delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \Gamma(f) = 1$$

Aufgabe 2: Short-Time-Fourier-Transformation II

Gegeben sei folgendes Signal $x(t)$:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha|t|}$$

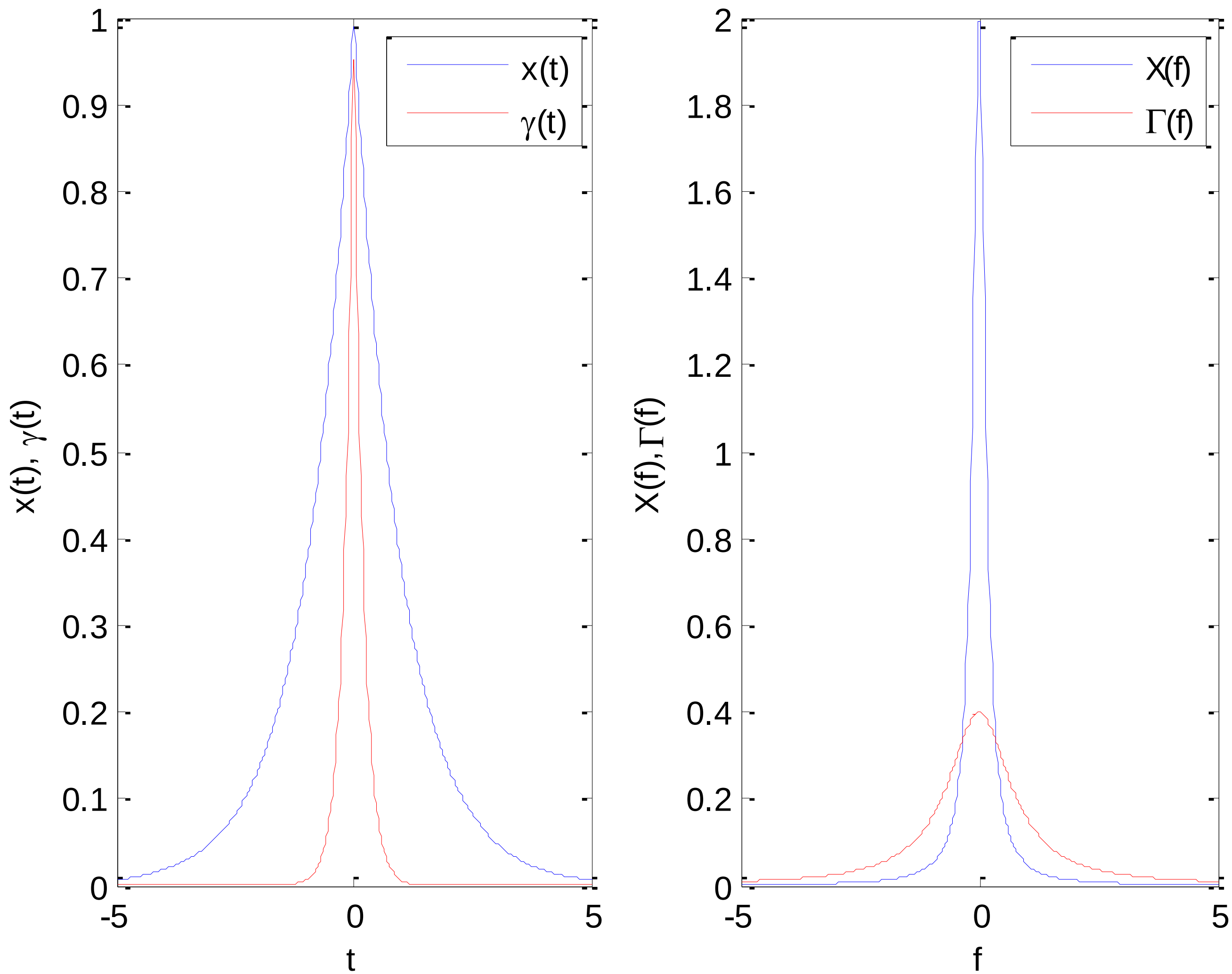
Dieses Signal soll mit Hilfe der Fensterfunktion

$$\gamma(t) = \mathrm{e}^{-\beta|t|}$$

untersucht werden. Bestimmen Sie die Short-Time-Fourier-Transformierte.

Aufgabe 2:
Short-Time-Fourier-Transformation II

$\alpha = 1$
$\beta = 5$



Aufgabe 2:
Short-Time-Fourier-Transformation II

Gegeben: $x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha|t|}$

Gesucht: STFT mit Analysefenster $\gamma(t) = \mathrm{e}^{-\beta|t|}$

STFT: $F_x^\gamma(\tau, f) = \left\langle x(t), \gamma(t-\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \gamma^*(t-\tau) \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi f t}\,\mathrm{d}t$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|t|} \cdot \mathrm{e}^{-\beta|t-\tau|} \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

Zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: $\tau \leq 0 \quad \Rightarrow -\infty < \tau \leq 0$

$$F_x^\gamma(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\tau} \underbrace{\mathrm{e}^{\alpha t}}_{t\leq 0} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\beta t}\mathrm{e}^{-\beta\tau}}_{t-\tau\leq 0} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t + \int_{\tau}^{0} \underbrace{\mathrm{e}^{\alpha t}}_{t\leq 0} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{\beta\tau}}_{t-\tau\geq 0} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

$$+ \int_{0}^{\infty} \underbrace{\mathrm{e}^{-\alpha t}}_{t\geq 0} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{\beta\tau}}_{t-\tau\geq 0} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

Aufgabe 2: Short-Time-Fourier-Transformation II

$$F_x^\gamma(\tau, f) = \mathrm{e}^{-\beta\tau} \int\limits_{-\infty}^{\tau} \mathrm{e}^{(\alpha+\beta-j2\pi f)t}\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{\beta\tau} \int\limits_{-\tau}^{0} \mathrm{e}^{(\alpha-\beta-j2\pi f)t}\mathrm{d}t$$

$$+ \mathrm{e}^{\beta\tau} \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta+j2\pi f)t}\mathrm{d}t$$

$$F_x^\gamma(\tau, f) = \frac{\mathrm{e}^{-\beta\tau}}{\alpha+\beta-\mathrm{j}2\pi f} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{(\alpha+\beta-\mathrm{j}2\pi f)t}\Big|_{-\infty}^{\tau}}_{=\mathrm{e}^{(\alpha+\beta-\mathrm{j}2\pi f)\tau}}$$

$$+ \frac{\mathrm{e}^{\beta\tau}}{\alpha-\beta-\mathrm{j}2\pi f} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{(\alpha-\beta-\mathrm{j}2\pi f)t}\Big|_{\tau}^{0}}_{=1-\mathrm{e}^{(\alpha-\beta-\mathrm{j}2\pi f)\tau}}$$

$$+ \frac{\mathrm{e}^{\beta\tau}}{-\alpha-\beta-\mathrm{j}2\pi f} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{(-\alpha-\beta-\mathrm{j}2\pi f)t}\Big|_{0}^{\infty}}_{=-1}$$

Aufgabe 2: Short-Time-Fourier-Transformation II

$$F_x^\gamma(\tau, f) = \frac{e^{-\beta\tau}}{\alpha+\beta-j2\pi f} \cdot \underbrace{e^{(\alpha+\beta-j2\pi f)t}\Big|_{-\infty}^{\tau}}_{=e^{(\alpha+\beta-j2\pi f)\tau}}$$

$$+ \frac{e^{\beta\tau}}{\alpha-\beta-j2\pi f} \cdot \underbrace{e^{(\alpha-\beta-j2\pi f)t}\Big|_{\tau}^{0}}_{=1-e^{(\alpha-\beta-j2\pi f)\tau}}$$

$$+ \frac{e^{\beta\tau}}{-\alpha-\beta-j2\pi f} \cdot \underbrace{e^{(-\alpha-\beta-j2\pi f)t}\Big|_{0}^{\infty}}_{=-1}$$

$$= \frac{e^{\alpha\tau}e^{-j2\pi f\tau}}{\alpha+\beta-j2\pi f} + \frac{e^{\beta\tau}-e^{\alpha\tau}e^{-j2\pi f\tau}}{\alpha-\beta-j2\pi f} + \frac{e^{\beta\tau}}{\alpha+\beta+j2\pi f}$$

$$= \frac{e^{-\beta|\tau|}}{(\alpha+\beta-j2\pi f)^*} + \frac{e^{-\alpha|\tau|}e^{-j2\pi f\tau}}{(\alpha+\beta+j2\pi f)^*} + \frac{e^{-\beta|\tau|}-e^{-\alpha|\tau|}e^{-j2\pi f\tau}}{(\alpha-\beta+j2\pi f)^*}$$

Aufgabe 2:
Short-Time-Fourier-Transformation II

2. Fall: $\tau \geq 0 \quad \Rightarrow 0 \leq \tau < \infty$

$$F_x^\gamma(\tau, f) = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{\mathrm{e}^{\alpha t}}_{t \leq 0} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\beta t}\mathrm{e}^{-\beta\tau}}_{t-\tau \leq 0} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\tau} \underbrace{\mathrm{e}^{-\alpha t}}_{t \geq 0} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\beta t}\mathrm{e}^{-\beta\tau}}_{t-\tau \leq 0} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

$$+ \int_{\tau}^{\infty} \underbrace{\mathrm{e}^{-\alpha t}}_{t \geq 0} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{\beta\tau}}_{t-\tau \geq 0} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\beta\tau}}{\alpha + \beta - \mathrm{j}2\pi f} \cdot \underbrace{\left. \mathrm{e}^{(\alpha+\beta-\mathrm{j}2\pi f)t} \right|_{-\infty}^{0}}_{=1}$$

$$+ \frac{\mathrm{e}^{-\beta\tau}}{-\alpha + \beta - \mathrm{j}2\pi f} \cdot \underbrace{\left. \mathrm{e}^{(-\alpha+\beta-\mathrm{j}2\pi f)t} \right|_{0}^{\tau}}_{=\mathrm{e}^{(-\alpha+\beta-\mathrm{j}2\pi f)\tau} - 1}$$

$$+ \frac{\mathrm{e}^{\beta\tau}}{-\alpha - \beta - \mathrm{j}2\pi f} \cdot \underbrace{\left. \mathrm{e}^{(-\alpha-\beta-\mathrm{j}2\pi f)t} \right|_{\tau}^{\infty}}_{=-\mathrm{e}^{(-\alpha-\beta-\mathrm{j}2\pi f)\tau}}$$

Aufgabe 2: Short-Time-Fourier-Transformation II

$$F_x^\gamma(\tau,f)=\frac{e^{-\beta\tau}}{\alpha+\beta-j2\pi f}+\frac{e^{-\beta\tau}-e^{-\alpha\tau}e^{-j2\pi f\tau}}{\alpha-\beta+j2\pi f}+\frac{e^{-\alpha\tau}e^{-j2\pi f\tau}}{\alpha+\beta+j2\pi f}$$

$$=\frac{e^{-\beta|\tau|}}{(\alpha+\beta-j2\pi f)}+\frac{e^{-\alpha|\tau|}e^{-j2\pi f\tau}}{(\alpha+\beta+j2\pi f)}+\frac{e^{-\beta|\tau|}-e^{-\alpha|\tau|}e^{-j2\pi f\tau}}{(\alpha-\beta+j2\pi f)}$$

$$F_x^\gamma(\tau,f)=\begin{cases}\frac{e^{-\beta|\tau|}}{(\alpha+\beta-j2\pi f)^*}+\frac{e^{-\alpha|\tau|}e^{-j2\pi f\tau}}{(\alpha+\beta+j2\pi f)^*}+\frac{e^{-\beta|\tau|}e^{-\alpha|\tau|}e^{-j2\pi f\tau}}{(\alpha-\beta+j2\pi f)^*}, & \text{wenn } \tau<0,\\ \frac{e^{-\beta|\tau|}}{(\alpha+\beta-j2\pi f)}+\frac{e^{-\alpha|\tau|}e^{-j2\pi f\tau}}{(\alpha+\beta+j2\pi f)}+\frac{e^{-\beta|\tau|}e^{-\alpha|\tau|}e^{-j2\pi f\tau}}{(\alpha-\beta+j2\pi f)}, & \text{wenn } \tau>0\end{cases}$$

Aufgabe 2:
Short-Time-Fourier-Transformation II

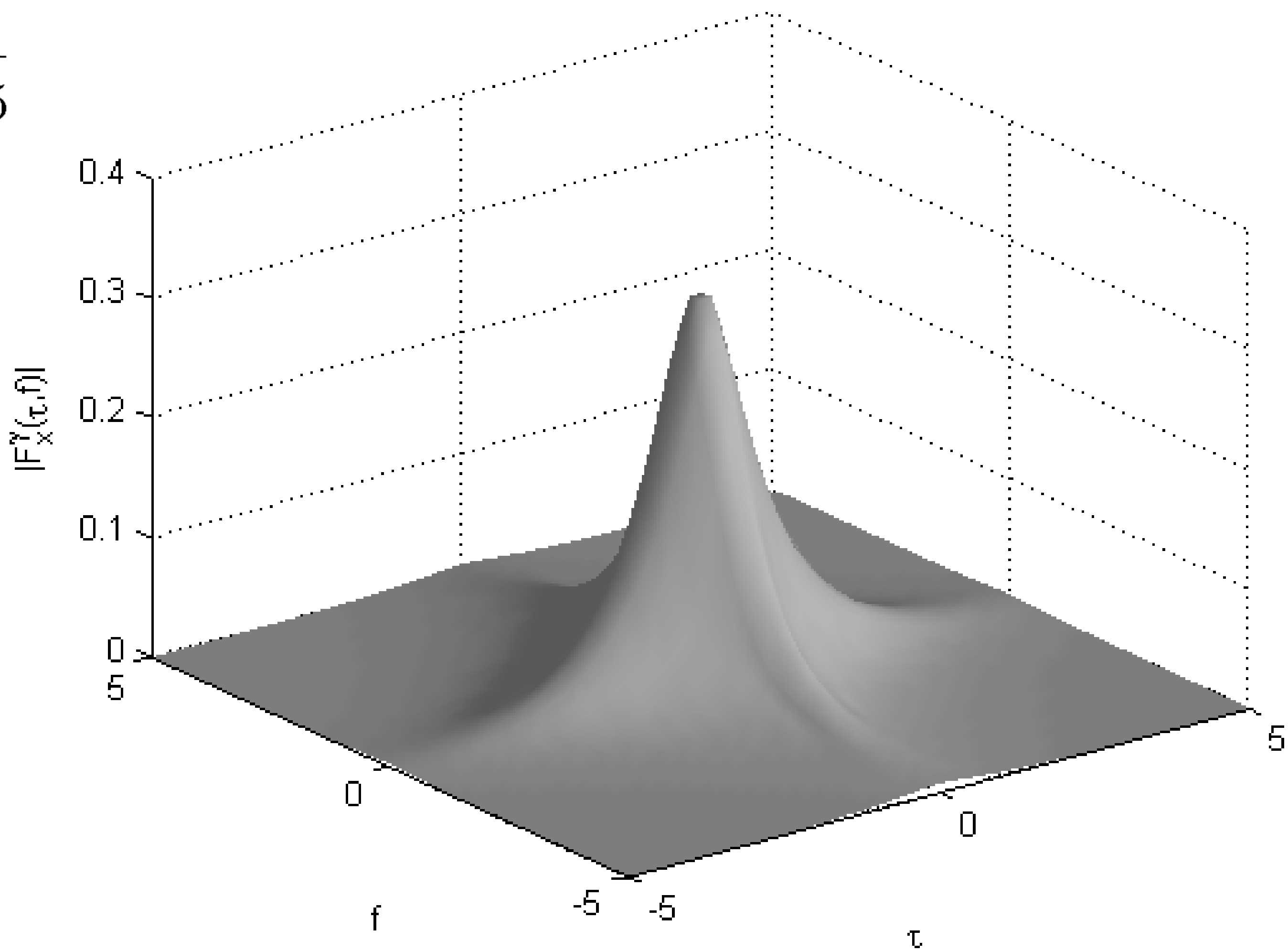
$$F_x^\gamma(\tau, f) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{-\beta|\tau|}}{(\alpha+\beta-j2\pi f)^*} + \frac{\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}\mathrm{e}^{-j2\pi f\tau}}{(\alpha+\beta+j2\pi f)^*} + \frac{\mathrm{e}^{-\beta|\tau|}\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}\mathrm{e}^{-j2\pi f\tau}}{(\alpha-\beta+j2\pi f)^*}, & \text{wenn } \tau < 0, \\ \frac{\mathrm{e}^{-\beta|\tau|}}{(\alpha+\beta-j2\pi f)} + \frac{\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}\mathrm{e}^{-j2\pi f\tau}}{(\alpha+\beta+j2\pi f)} + \frac{\mathrm{e}^{-\beta|\tau|}\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}\mathrm{e}^{-j2\pi f\tau}}{(\alpha-\beta+j2\pi f)}, & \text{wenn } \tau > 0 \end{cases}$$

Für $\tau = 0$:

$$F_x^\gamma(0, f) = \frac{2(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^2 + (2\pi f)^2} = \mathcal{F}\left\{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)|t|}\right\}$$

Aufgabe 2:
Short-Time-Fourier-Transformation II

$\alpha = 1$
$\beta = 5$



Aufgabe 3: STFT-Rückgewinnung

Gegeben sei das Signal

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t^2},$$

das mit der STFT untersucht werden soll.

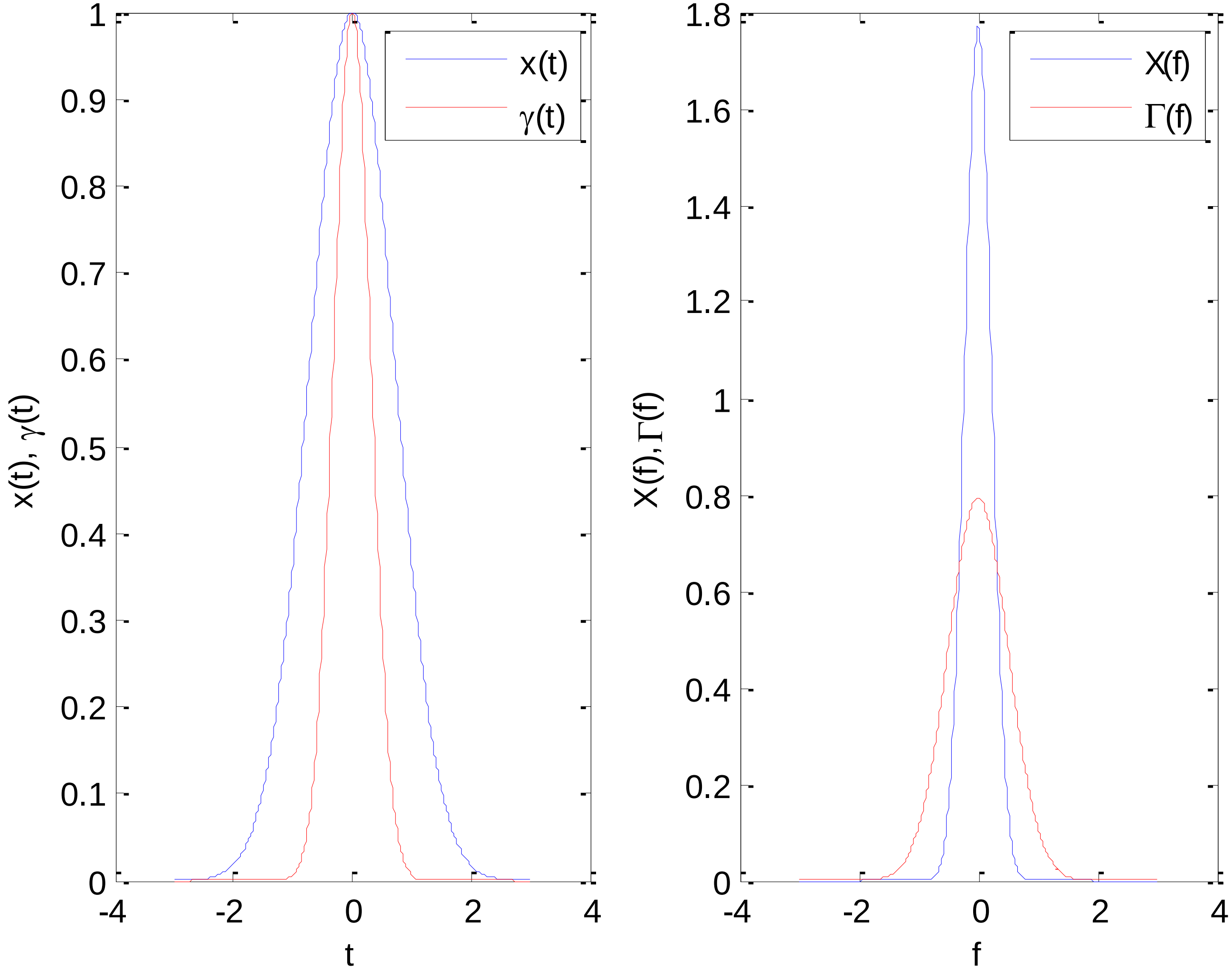
a) Bestimmen Sie die Short-Time-Fourier-Transformierte mit Hilfe des Fensters $\gamma(t) = \mathrm{e}^{-\beta t^2}$.

b) Als Synthesefenster wird $\tilde{\gamma}(t) = c \cdot \mathrm{e}^{-\beta t^2}$ angesetzt. Bestimmen Sie den Faktor c so, dass eine Signalrekonstruktion möglich ist.

c) Berechnen Sie das ursprüngliche Signal aus der Short-Time-Fourier-Transformierten.

Aufgabe 3: STFT-Rückgewinnung

$$\alpha = 1$$
$$\beta = 5$$



Aufgabe 3: STFT-Rückgewinnung

- a) STFT:

$$
\begin{aligned}
F_x^{\gamma}(\tau,f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\gamma^*(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t^2}\,\underbrace{\mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)^2}}_{\text{Ausmultiplizieren}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha t^2 - \beta t^2 + 2\beta t\tau - \beta\tau^2\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\underbrace{-\alpha t^2 - \beta t^2 + 2\beta t\tau}_{-(\alpha+\beta)\text{ ausklammern}}\ \underbrace{-\beta\tau^2}_{\text{vor Integral ziehen}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-\beta\tau^2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(\alpha+\beta)\left(t^2 - \frac{2\beta\tau}{\alpha+\beta}t\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: STFT-Rückgewinnung

- a)

$$F_x^\gamma(\tau,f) = \mathrm{e}^{-\beta\tau^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Bigg(-(\alpha+\beta)\Bigg(t^2 - \frac{2\beta\tau}{\alpha+\beta}t$$

$$\underbrace{+\left(\frac{\beta\tau}{\alpha+\beta}\right)^2 - \left(\frac{\beta\tau}{\alpha+\beta}\right)^2}_{=0} \Bigg)\Bigg) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \exp\left(-\beta\tau^2 + \frac{\beta^2}{\alpha+\beta}\tau^2 \right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(\alpha+\beta)\left(t - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\tau \right)^2 \right)$$

$$\cdot\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \exp\left(-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\tau^2 \right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(\alpha+\beta)\left(t - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\tau \right)^2 \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

Aufgabe 3: STFT-Rückgewinnung

- a)

$$F_x^\gamma(\tau,f) = \exp\left(-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\tau^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-(\alpha+\beta)\underbrace{\left(t-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\tau\right)}_{\text{Zeitverschiebungsregel}}{}^2\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \exp\left(-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\tau^2\right)\cdot\exp\left(-\mathrm{j}2\pi f\frac{\beta}{\alpha+\beta}\tau\right)\cdot\mathcal{F}\left\{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t^2}\right\}$$

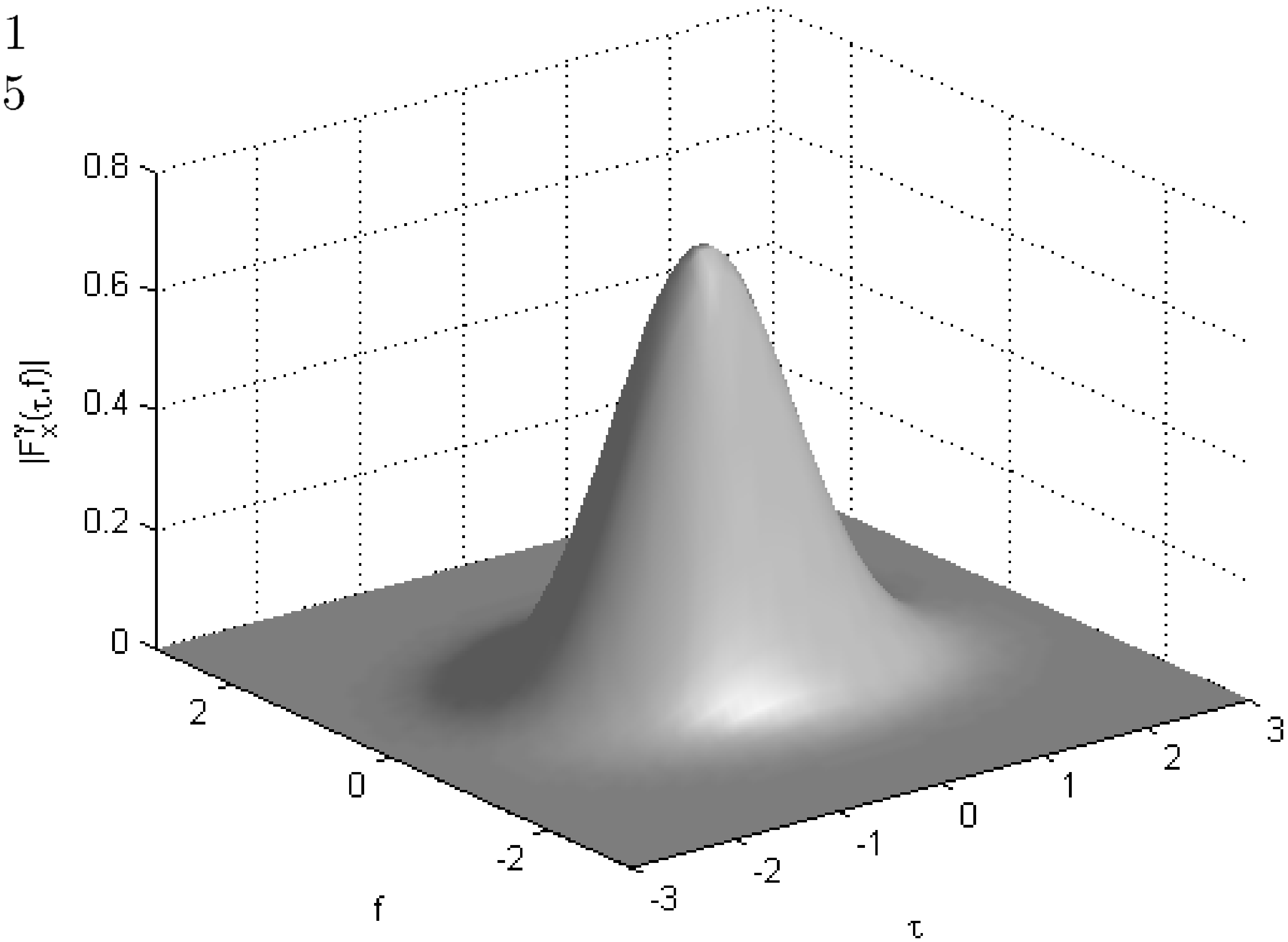
$$= \exp\left(-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\tau^2\right)\cdot\exp\left(-\mathrm{j}2\pi f\frac{\beta}{\alpha+\beta}\tau\right)\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\beta}}\cdot\exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha+\beta}\right)$$

Gaußimpuls

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left|F_x^\gamma(\tau,f)\right| = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\beta}}\cdot\exp\left(-\frac{\alpha\beta\cdot\tau^2+\pi^2 f^2}{\alpha+\beta}\right)}$$

Aufgabe 3: STFT-Rückgewinnung

$\alpha = 1$
$\beta = 5$



Aufgabe 3: STFT-Rückgewinnung

- b) Es muss gelten:

$$\langle \tilde{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}(t)\gamma^*(t)\mathrm{d}t = c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\beta t^2}$$

$$= c \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}}$$

Aufgabe 3: STFT-Rückgewinnung

- c) Signal-Rekonstruktion:

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_x^{\gamma}(\tau,f)\,\tilde{\gamma}(t-\tau)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}f$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\tau^2\right)\exp\left(-\mathrm{j}2\pi f\frac{\beta}{\alpha+\beta}\tau\right)\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\beta}}\cdot\exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha+\beta}\right)$$

$$\cdot\sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}\cdot\mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}f$$

Aufgabe 3: STFT-Rückgewinnung

- c)

$$\hat{x}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\tau^2\right) \exp\left(-\mathrm{j}2\pi f \frac{\beta}{\alpha+\beta}\tau\right) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\beta}}$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha+\beta}\right) \cdot \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)^2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t} \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}f$$

$$= \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha+\beta}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\tau^2\right) \cdot \mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)^2}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha+\beta}\right) \cdot \exp\left(\mathrm{j}2\pi f \left(t - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\tau\right)\right) \mathrm{d}f \, \mathrm{d}\tau$$

Aufgabe 3: STFT-Rückgewinnung

- c) Berechnung des inneren Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha+\beta}\right) \cdot \exp\left(\mathrm{j}2\pi f\left(t-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\tau\right)\right) \mathrm{d}f$$

$$= \mathcal{F}_f^{-1}\left\{\exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha+\beta}\right)\right\}\Bigg|_{t-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\tau}$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\pi}} \exp\left(-(\alpha+\beta)\left(t-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\tau\right)^2\right)$$

Aufgabe 3: STFT-Rückgewinnung

- c)

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha+\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\tau^2\right) \cdot \mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)^2}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha+\beta}\right) \cdot \exp\left(\mathrm{j}2\pi f\left(t - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\tau\right)\right) \mathrm{d}f \,\mathrm{d}\tau$$

$$= \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha+\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\tau^2\right) \cdot \mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)^2}$$

$$\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\pi}} \exp\left(-(\alpha+\beta)\left(t - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\tau\right)^2\right) \mathrm{d}\tau$$

Aufgabe 3: STFT-Rückgewinnung

- c)

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha+\beta}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\tau^2\right) \cdot \mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)^2}$$

$$\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\pi}} \exp\left(-(\alpha+\beta)\left(t-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\tau\right)^2\right) \,\mathrm{d}\tau$$

$$= \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\tau^2 - \beta(t-\tau)^2 - (\alpha+\beta)\left(t-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\tau\right)^2\right) \,\mathrm{d}\tau$$

$$= [\ldots] \qquad \text{(ausmultiplizieren)}$$

Aufgabe 3: STFT-Rückgewinnung

- c)

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2\beta\tau^2 + 4\beta t\tau - \beta t^2 - (\alpha+\beta)t^2 \right) \mathrm{d}\tau$$

$$= \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2\beta\tau^2 + 4\beta t\tau \underbrace{-\beta t^2 - (\alpha+\beta)t^2}_{=-\alpha t^2 - 2\beta t^2} \right) \mathrm{d}\tau$$

$$= \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t^2}\, \mathrm{e}^{-2\beta t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\beta\tau^2 + 4\beta t\tau}\, \mathrm{d}\tau$$

$$= \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t^2}\, \mathrm{e}^{-2\beta t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\beta(\tau^2 - 2t\tau + t^2 - t^2)}\, \mathrm{d}\tau$$

Aufgabe 3: STFT-Rückgewinnung

- c)

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t^2}\, \mathrm{e}^{-2\beta t^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\beta(\tau^2 - 2t\tau + t^2 - t^2)}\, \mathrm{d}\tau$$

$$= \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t^2}\, \underbrace{\mathrm{e}^{-2\beta t^2}\, \mathrm{e}^{2\beta t^2}}_{=1} \cdot \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\beta(t-\tau)^2}\, \mathrm{d}\tau}_{=\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}}$$

$$\boxed{\hat{x}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t^2}}$$